Coulombov zakon in Gaussov stavek

Rešene naloge

Edi Bulić

30. oktober 2008

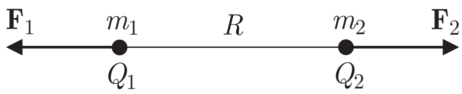
1 Določanje električnega polja po Coulombovem zakonu

1.1 Polje točkaste elektrine

1.1.1 Naloga

Dve majhni naelektreni kroglici z nabojema Q_1 in Q_2 ($Q_1 Q_2 > 0$) ter masama m_1 in m_2 sta na medsebojni oddaljenosti d. Kolikšno kinetično energijo pridobi druga, ko jo prepustimo vplivu odbojne električne sile, če je gravitacijska sila med njima zanemarljiva? In kako je obratno, ko vlogi kroglic zamenjamo?

Rešitev
Kinetična energija $W_{\mathrm{k}2}$, ki jo pridobi druga kroglica, je enaka delu A_2, ki ga opravi odbojna električna sila $\mathbf{F}_2$ (slika 1) pri premiku te kroglice (iz začetne lege, ko je medsebojna oddaljenost kroglic $R = d$) daleč stran od prve kroglice ($R \to \infty$). To delo je enako integralu sile



Slika 1: Sili na naelektreni kroglici.

na poti

$$W_{\mathrm{k}2} = A_2 = \int_d^\infty F_2(R)\,\mathrm{d}R, \tag{1}$$

kjer je sila določena po Coulombovem zakonu [1, razdelek 9]

$$F_2(R) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}. \tag{2}$$

Po vstavitvi tega izraza v integral (1) dobimo

$$W_{\mathrm{k}2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^\infty \frac{1}{R^2}\,\mathrm{d}R = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R}\right)\Bigg|_d^\infty = \boxed{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}}. \tag{3}$$

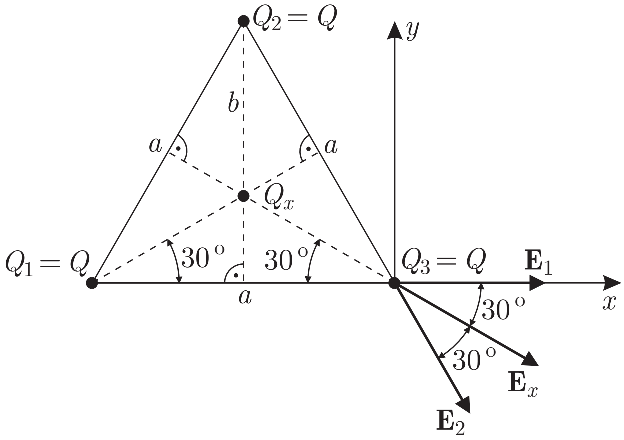
Če vlogi kroglic zamenjamo, bo pridobljena kinetična energija enaka ($W_{\mathrm{k}1} = W_{\mathrm{k}2}$), saj sta električni sili na kroglici vzajemni.

1.1.2 Naloga

Tri enake točkaste elektrine množin Q so razmeščene v oglišča enakostraničnega trikotnika s stranico dolžine a. Kolikšno elektrino Q_x moramo namestiti v njegovo težišče, da bodo električne sile na vse elektrine enake nič?

Rešitev

Zapišemo izraze za električne sile na vse štiri elektrine in jih izenačimo z nič. Tako dobimo enačbe, iz katerih lahko določimo iskano elektrino Q_x[1]. Sile so vektorske količine, zato najprej izberimo koordinatni sistem, v katerem jih bomo zapisali. Za rešitev te naloge je najbolj ustrezen kartezični koordinatni sistem (slika 2).



Slika 2: Vektorji električne poljske jakosti na mestu tretje elektrine.

Zapišimo silo na elektrino, ki se nahaja v težišču trikotnika. Njena oddaljenost do elektrin v ogliščih je enaka $b = a/\sqrt{3}$. Sila na točkasto elektrino je enaka produktu njene množine in električne poljske jakosti v točki, kjer se ta elektrina nahaja [1, razdelek 11]. Vektor električne poljske jakosti v težišču trikotnika določimo s superponiranjem prispevkov treh ogliščnih elektrin:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{na mestu } Q_x} &= \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\,(-\mathbf{e}_y) + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\,(\mathbf{e}_x\cos 30^\circ + \mathbf{e}_y \sin 30^\circ)\\ &\quad + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\,(-\mathbf{e}_x\cos 30^\circ + \mathbf{e}_y \sin 30^\circ)\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\,(-\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_x\cos 30^\circ + \mathbf{e}_y \sin 30^\circ - \mathbf{e}_x\cos 30^\circ + \mathbf{e}_y \sin 30^\circ)\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{4}$$

Poljska jakost je enaka nič, torej je tudi sila

$$\mathbf{F}_{\text{na } Q_x} = Q_x \mathbf{E}_{\text{na mestu } Q_x} = \mathbf{0} \qquad \text{(neglede na vrednost elektrine } Q_x). \tag{5}$$

Ker sila $\mathbf{F}_{\text{na } Q_x}$ ni odvisna od elektrine Q_x in je vedno enaka nič (oziroma ničelnemu vektorju), iz izraza za to silo ne moremo določiti Q_x. Uporabiti bomo morali izraz za silo na eno od ogliščnih elektrin. Če je sila na eno od teh elektrin enaka nič, potem sta zaradi simetrije problema tudi sili na preostali ogliščni elektrini enaki nič. Zadostovala bo torej obravnava le sile na eno od ogliščnih elektrin, npr. spodnjo desno (slika 2). Vektor električne

[1] Izkazalo se bo, da je za določitev Q_x (torej ene skalarne količine) potrebna le ena od teh enačb.

poljske jakosti na njenem mestu je

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{na mestu } Q_3} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_x \\
&= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\,\mathbf{e}_x + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\,(\mathbf{e}_x \cos 60\,^\circ - \mathbf{e}_y \sin 60\,^\circ) \\
&\quad + \frac{Q_x}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\,(\mathbf{e}_x \cos 30\,^\circ - \mathbf{e}_y \sin 30\,^\circ) \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\mathbf{e}_x 3/2 - \mathbf{e}_y \sqrt{3}/2\right) + \frac{Q_x}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\left(\mathbf{e}_x \sqrt{3}/2 - \mathbf{e}_y/2\right),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

sila nanjo pa

$$
\mathbf{F}_{\text{na } Q_3} = Q_3 \mathbf{E}_{\text{na mestu } Q_3} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\mathbf{e}_x 3/2 - \mathbf{e}_y \sqrt{3}/2\right) + \frac{Q Q_x}{4\pi\varepsilon_0 a^2/3}\left(\mathbf{e}_x \sqrt{3}/2 - \mathbf{e}_y/2\right). \tag{7}
$$

Ko to silo izenačimo z nič, dobimo enačbo

$$
\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\mathbf{e}_x 3/2 - \mathbf{e}_y \sqrt{3}/2\right) + \frac{Q Q_x}{4\pi\varepsilon_0 a^2/3}\left(\mathbf{e}_x \sqrt{3}/2 - \mathbf{e}_y/2\right) = \mathbf{0} \quad \Big/ : \frac{Q/2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \tag{8}
$$

$$
Q\left(3\mathbf{e}_x - \sqrt{3}\,\mathbf{e}_y\right) + 3Q_x\left(\sqrt{3}\,\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y\right) = \mathbf{0}, \tag{9}
$$

iz katere lahko izračunamo iskano elektrino Q_x. Vektor sile $\mathbf{F}_{\text{na } Q_3}$ je enak ničelnemu vektorju, če so vse njegove komponente enake nič:

$$
\mathbf{e}_x: \quad 3Q + 3\sqrt{3}Q_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Q_x = -Q/\sqrt{3}} \tag{10}
$$

$$
\mathbf{e}_y: \quad -\sqrt{3}Q - 3Q_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Q_x = -Q/\sqrt{3}}. \tag{11}
$$

Pri obeh komponentah dobimo enako vrednost naboja Q_x. Če temu ne bi bilo tako, bi to pomenilo, da ne obstaja takšna vrednost naboja Q_x, ki zagotavlja, da so električne sile (oziroma vse komponente teh sil) na vse elektrine enake nič.

Predznak minus pri vrednosti elektrine Q_x pomeni, da je ta elektrina nasprotnega predznaka kot elektrine v ogliščih ter da je dejanska poljska jakost $\mathbf{E}_x$ nasprotne smeri kot vsota $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ (slika 2), torej tolikšna, da je vsota $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_x = \mathbf{0}$.

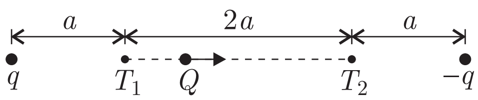
V razmislek

Ali lahko tudi v primeru, ko so elektrine Q_1, Q_2 in Q_3 medseboj različne, najdemo tako elektrino Q_x, da bodo električne sile na vse elektrine enake nič. Kaj pa, ko so elektrine Q_1, Q_2, Q_3 in Q_x kako drugače razmeščene in ne ravno v oglišča ter težišče enakostraničnega trikotnika?

1.2 Polje preme elektrine

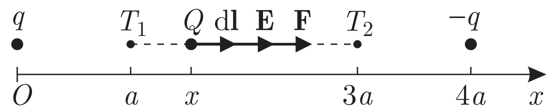
1.2.1 Naloga

Koliko dela opravi električna sila polja dveh vzporednih premih elektrin vzdolžnih gostot q in $-q$, da premakne točkasto elektrino množine Q od točke T_1 do točke T_2 (slika 3)?



Slika 3: Točkasta elektrina v polju dveh premih elektrin.

Rešitev
Za rešitev dane naloge zadostuje le ena os koordinatnega sistema. Naj bo to npr. os x, ki naj je vzporedna z zveznico med točkama T_1 in T_2 (slika 4). Delo A, ki ga opravi električna



Slika 4: Vektor sile na točkasto elektrino.

sila $\mathbf{F}$, je enako krivuljnemu integralu te sile vzdolž poti med točkama T_1 in T_2:

$$A = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}. \tag{12}$$

Poljska jakost $\mathbf{E}$, ki jo "čuti" točkasta elektrina (v točki x) je enaka vsoti poljskih jakosti (posameznih) premih elektrin [1, zgled 11.2]:

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{e}_x \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 x} + \mathbf{e}_x \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 (4a - x)}, \tag{13}$$

sila na to elektrino pa je

$$\mathbf{F}(x) = Q\mathbf{E}(x) = \mathbf{e}_x \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4a - x} \right). \tag{14}$$

Vektor diferencialnega premika na daljici $\overline{T_1 T_2}$ je enako usmerjen kot sila ($\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathbf{e}_x \, \mathrm{d}x$), pa je

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = F \, \mathrm{d}x = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4a - x} \right) \mathrm{d}x. \tag{15}$$

Če to upoštevamo v integralu (12), sledi

$$\begin{aligned} A &= \int_a^{3a} \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4a - x} \right) \mathrm{d}x = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0} \big(\ln x - \ln(4a - x) \big) \Big|_a^{3a} \\ &= \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0} \left(\ln \frac{3a}{a} - \ln \frac{a}{3a} \right) = \boxed{\frac{qQ}{\pi\varepsilon_0} \ln 3}. \end{aligned} \tag{16}$$

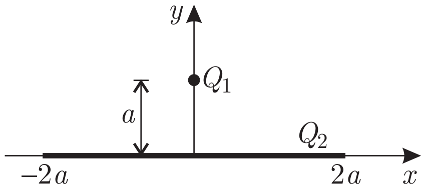
1.3 Polje naelektrene daljice

1.3.1 Naloga

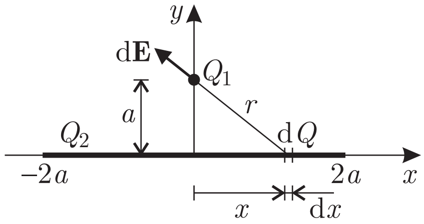
Izpeljite izraz za vektor električne sile na točkasto elektrino množine Q_1, ki se nahaja na oddaljenosti a od žice dolžine $4a$ naelektrene z nabojem Q_2 (slika 5). Pri računu predpostavite enakomerno porazdeljenost elektrine vzdolž žice.

Rešitev
Žico (v mislih) razdelimo na diferencialno kratke segmente dolžine $\mathrm{d}x$ (slika 6), ki so naelektreni z naboji $\mathrm{d}Q = (Q_2/4a)\,\mathrm{d}x$. Absolutna vrednost diferencialne poljske jakosti v točki $(0, a)$ (na mestu točkaste elektrine), ki jo prispeva segment v točki $(x, 0)$, je

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q_2}{16\pi\varepsilon_0 a r^2} \, \mathrm{d}x, \tag{17}$$



Slika 5: Točkasta elektrina in naelektrena žica.



Slika 6: Izračun polja na mestu točkaste elektrine.

kjer je $r = \sqrt{a^2 + x^2}$. Celotno poljsko jakost določimo z integriranjem ("seštevanjem") teh diferencialnih prispekov, pri čemer je dovolj integrirati le y komponente $\mathrm{d}E_y = (a/r)\,\mathrm{d}E$, saj se x komponente odštejejo zaradi simetrije žice preko osi y:

$$\begin{aligned} E_y(0,a) &= \int_{x=-2a}^{x=2a} \mathrm{d}E_y = \int_{-2a}^{2a} \frac{a}{r} \frac{Q_2}{16\pi\varepsilon_0 a r^2}\,\mathrm{d}x = \frac{Q_2}{16\pi\varepsilon_0} \int_{-2a}^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Q_2}{16\pi\varepsilon_0} \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\Bigg|_{-2a}^{2a} = \frac{Q_2}{16\pi\varepsilon_0} \frac{4a}{a^2\sqrt{a^2+(2a)^2}} = \frac{Q_2}{4\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 a^2} \end{aligned} \tag{18}$$

[2]. Vektor električne sile na točkasto elektrino je enak produktu njene množine Q_1 in vektorja poljske jakosti na njenem mestu $\mathbf{E}(0,a) = \mathbf{e}_y E_y(0,a)$:

$$\mathbf{F} = Q_1 \mathbf{E}(0,a) = \boxed{\frac{Q_1 Q_2}{4\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 a^2}\mathbf{e}_y}. \tag{19}$$

1.4 Polje naelektrene krožne zanke

1.4.1 Naloga

Najmanj kolikšno hitrost v_0 mora imeti curek elektronov ob "izstrelitvi", da še premaga zaviralni učinek električnega polja naelektrenega prstana, če elektroni potujejo vzdolž osi prstana (slika 7)? Mesto "izstrelitve" je daleč od prstana. Polmer prstana je ρ_0, naelektren pa je z negativno elektrino Q.

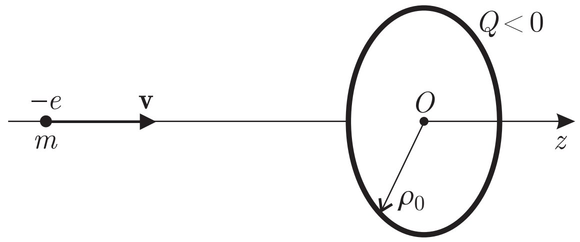
[2]Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

lahko rešimo s substitucijo $x = a\tan\alpha$:

$$a^2 + x^2 = a^2\left(1+\tan^2\alpha\right) = a^2/\cos^2\alpha \quad , \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^{-2}\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2/x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

$$\mathrm{d}x = a\frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha} \quad , \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \int \frac{a/\cos^2\alpha}{a^3/\cos^3\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{a^2}\int \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{a^2}\sin\alpha = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$



Slika 7: Elektron potuje proti naelektrenem prstanu.

Rešitev
Ker imata elektron in prstan naboj istega predznaka, deluje na elektron odbojna električna sila. Zato se mu hitrost in kinetična energija manjšata, ko potuje proti prstanu. Da elektron premaga zaviralni učinek polja, mora imeti ob “izstrelitvi” dovolj veliko kinetično energijo, da se ta ne izniči (oziroma da elektron ne obrne), preden prileti do središča prstana. Naprej od središča bo elektron zaradi odbojne sile pospeševal in daleč stran spet dosegel prvotno hitrost v_0.

Električno silo, s katero polje prstana učinkuje na elektron, ko ta potuje vzdolž njegove osi, določimo iz električnega polja na tej osi [1, zgled 11.3]:

$$\mathbf{F}(z) = -e\mathbf{E}(z) = \mathbf{e}_z \frac{-eQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{\left(z^2+\rho_0^2\right)^{3/2}}, \tag{20}$$

kjer je $-e$ naboj elektrona, z pa njegova trenutna lega na osi prstana. Delo te sile oziroma prirastek kinetične energije elektrona na njegovi poti od mesta izstrelitve ($z \to -\infty$) do središča prstana ($z = 0$) je

$$\Delta W_\mathrm{k} = W_{\mathrm{k,\ v\ središču\ prstana}} - W_{\mathrm{k,\ ob\ izstrelitvi}} = \int_{-\infty}^{0} \mathbf{F}(z) \cdot (\mathbf{e}_z \,\mathrm{d}z), \tag{21}$$

kjer je $\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}z$ vektor diferencialnega premika elektrona. To delo je v bistvu negativno, saj sila zavira gibanje na tem delu poti. To pomeni, da je prirastek kinetične energije negativen oziroma da se energija zmanjša.

Začetna kinetična energija je določena s hitrostjo ob “izstrelitvi” po enačbi

$$W_{\mathrm{k,\ ob\ izstrelitvi}} = mv_0^2/2, \tag{22}$$

kjer je m masa elektrona. Da elektron premaga zaviralni učinek polja, mora prileteti do središča prstana ($W_{\mathrm{k,\ v\ središču\ prstana}} > 0$). Če ta pogoj upoštevamo v enačbi (21), sledi

$$\frac{mv_0^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} \mathbf{F}(z) \cdot \mathbf{e}_z \,\mathrm{d}z = W_{\mathrm{k,\ v\ središču\ prstana}} > 0 \quad \Longrightarrow \tag{23}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} > -\int_{-\infty}^{0} F_z(z)\,\mathrm{d}z = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{z}{\left(z^2+\rho_0^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}z = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0} \left.\frac{-1}{\sqrt{z^2+\rho_0^2}}\right|_{-\infty}^{0} \tag{24}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} > -\frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_0 > \sqrt{\frac{e(-Q)}{2\pi\varepsilon_0\rho_0 m}}} \tag{25}$$

[3].

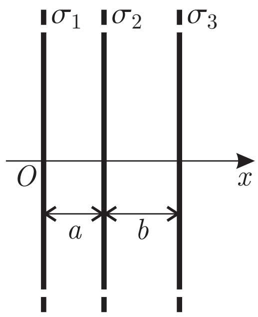
[3]Integral

$$\int \frac{z}{\left(z^2+\rho_0^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}z$$

1.5 Polje naelektrene ravnine

1.5.1 Naloga

V prostoru se nahajajo trije vzporedni ravninski sloji elektrin s ploskovnimi gostotami $\sigma_1 = -\sigma$, $\sigma_2 = 3\sigma$ in $\sigma_3 = -2\sigma$ (slika 8). Določite vektor električne poljske jakosti v vseh štirih podprostorih.



Slika 8: Naelektrene ravnine.

Rešitev

Polje v vsakem od štirih podprostorov lahko določimo s superponiranjem prispevkov vseh treh slojev [1, zgled 11.4]:

1. $x < 0$
$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \mathbf{e}_x \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \mathbf{e}_x \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \mathbf{0}, \tag{26}$$

2. $0 < x < a$
$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \mathbf{e}_x \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \mathbf{e}_x \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = -\mathbf{e}_x \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{27}$$

3. $a < x < a + b$
$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \mathbf{e}_x \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \mathbf{e}_x \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \mathbf{e}_x \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{28}$$

4. $x > a + b$:
$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \mathbf{e}_x \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \mathbf{e}_x \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \mathbf{0}. \tag{29}$$

Zapišimo celoten rezultat z eno enačbo:

$$\boxed{\mathbf{E}(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & x < 0 \\ -\mathbf{e}_x\, \sigma/\varepsilon_0 & 0 < x < a \\ \mathbf{e}_x 2\sigma/\varepsilon_0 & a < x < a + b \\ \mathbf{0} & x > a + b \end{cases}}. \tag{30}$$

---

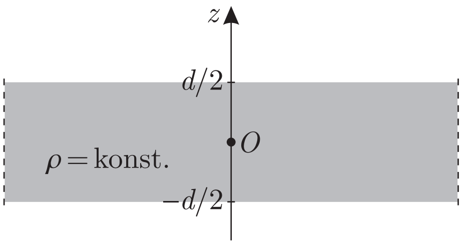
lahko rešimo s substitucijo $t = z^2 + \rho_0^2$:

$$\mathrm{d}t = 2z\,\mathrm{d}z \quad , \quad \int \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2 + \rho_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho_0^2}}.$$

1.6 Polje plasti elektrin

1.6.1 Naloga

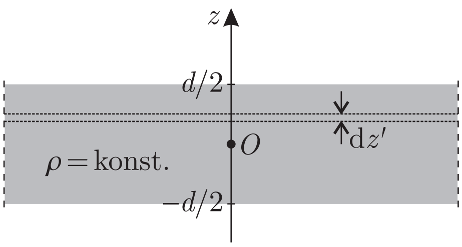
Določite vektor električne poljske jakosti v in ob razsežni plasti (oblaku) elektrin prostorske gostote ρ in debeline d (slika 9). Kako interpretirati produkt ρd v izrazu za polje izven oblaka? Kolikšno hitrost v smeri osi z bi morala tik pod oblakom imeti točkasta elektrina množine Q z maso m, da bi ga še preletela? Možnost trkov izločimo.



Slika 9: Plast elektrin enakomerne gostote.

Rešitev

Plast elektrin (v mislih) razdelimo na diferencialno ozke plasti debeline $\mathrm{d}z'$ (slika 10), ki jih lahko obravnavamo kot naelektrene ravnine [1, zgled 11.4] s ploskovno gostoto elektrine $\mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}z'$. Celotno polje izračunamo z integriranjem ("seštevanjem") prispevkov teh dife-



Slika 10: Delitev na diferencialne plasti.

rencialnih plasti. Polje določamo ločeno v treh podprostorih: nad plastjo, pod plastjo in v plasti.

1. Nad plastjo ($z > d/2$):
$$\mathbf{E} = \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{e}_z \frac{\rho\,\mathrm{d}z'}{2\varepsilon_0} = \mathbf{e}_z \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}, \tag{31}$$

2. Pod plastjo ($z < -d/2$):
$$\mathbf{E} = \int_{-d/2}^{d/2} -\mathbf{e}_z \frac{\rho\,\mathrm{d}z'}{2\varepsilon_0} = -\mathbf{e}_z \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}, \tag{32}$$

3. V plasti ($-d/2 \leq z \leq d/2$):
$$\mathbf{E} = \int_{-d/2}^{z} \mathbf{e}_z \frac{\rho\,\mathrm{d}z'}{2\varepsilon_0} + \int_{z}^{d/2} -\mathbf{e}_z \frac{\rho\,\mathrm{d}z'}{2\varepsilon_0} = \mathbf{e}_z \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[(z+d/2)-(d/2-z)\right] = \mathbf{e}_z \frac{\rho z}{\varepsilon_0}. \tag{33}$$

Celotno polje je torej

$$\boxed{\mathbf{E}(z) = \begin{cases} -\,\mathbf{e}_z \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0} & z < -d/2 \\ \mathbf{e}_z \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0} & -\,d/2 \leq z \leq d/2 \\ \mathbf{e}_z \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0} & z > d/2 \end{cases}}. \tag{34}$$

Produkt ρd, ki nastopa v izrazu za polje izven oblaka ($z < -d/2$ ali $z > d/2$), lahko interpretiramo kot ploskovno gostoto elektrine naelektrene ravnine, ki je vzporedna s plastjo (oblakom) in se nahaja kjerkoli v pasu med $z = -d/2$ in $z = d/2$, saj bi ta ravnina izven območja oblaka povzročala enako polje, kot ga oblak sam. Če bi torej oblak elektrin zamenjali s takšno naelektreno ravnino, se polje izven oblaka ne bi spremenilo (polje znotraj oblaka pa bi se seveda spremenilo).

Če sta elektrina v oblaku in točkasta elektrina, ki tik pod oblakom ($z \to -d/2 - 0$) s hitrostjo $v_{\text{zač.}}$ potuje v smeri osi z, enakega predznaka ($\rho Q > 0$), potem polje oblaka zavira točkasto elektrino le do sredine oblaka, torej do $z = 0$, ker je do tam električna sila $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ na to elektrino usmerjena v smeri $-\mathbf{e}_z$. Nad sredino oblaka ($z > 0$) polje pospešuje točkasto elektrino. Torej, da bi ta preletela oblak, mora imeti tolikšno začetno kinetično energijo $W_{\text{k, zač.}} = mv_{\text{zač.}}^2/2$, da jo zaviralna sila ne ustavi do sredine oblaka ($W_{\text{k},\ z=0} > 0$). Prirastek kinetične energije točkaste elektrine na poti od $z = -d/2$ do $z = 0$ je enak delu, ki ga opravi električna sila $Q\mathbf{E}$:

$$\Delta W_{\text{k}} = W_{\text{k},\ z=0} - W_{\text{k, zač.}} = \int_{-d/2}^{0} Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_z \,\mathrm{d}z. \tag{35}$$

Od tod, ob upoštevanju pogoja $W_{\text{k},\ z=0} > 0$, sledi

$$mv_{\text{zač.}}^2/2 + \int_{-d/2}^{0} QE_z \,\mathrm{d}z = W_{\text{k},\ z=0} > 0 \quad \Longrightarrow \tag{36}$$

$$\frac{mv_{\text{zač.}}^2}{2} > -\int_{-d/2}^{0} Q\frac{\rho z}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}z = -\frac{Q\rho}{\varepsilon_0}\frac{z^2}{2}\bigg|_{-d/2}^{0} = \frac{Q\rho d^2}{8\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_{\text{zač.}} > \frac{d}{2}\sqrt{\frac{Q\rho}{m\varepsilon_0}}}. \tag{37}$$

Če sta elektrina oblaka in točkasta elektrina nasprotnega predznaka ($\rho Q < 0$), potem električna sila pospešuje točkasto elektrino do sredine oblaka, naprej pa jo upočasnjuje. Do sredine oblaka se ji kinetična energija poveča za enako vrednost, kot se ji od sredine do konca oblaka ($z = d/2$) zmanjša. Torej ne glede kolikšna je njena začetna hitrost ($v_{\text{zač.}} > 0$) v smeri osi z, vedno preleti oblak.

2 Določanje električnega polja s pomočjo Gaussovega stavka

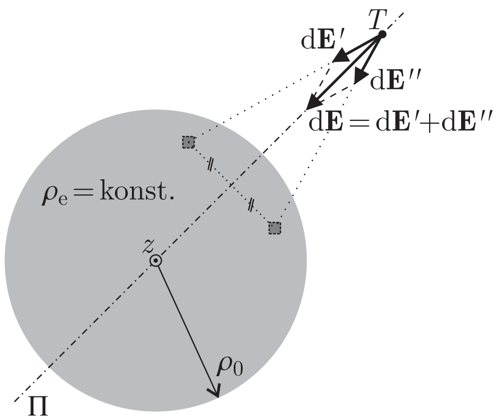
2.1 Polje valjno simetričnega oblaka elektrin

2.1.1 Naloga

Določite radialno funkcijsko odvisnost električne poljske jakosti v in ob dolgem, ravnem in enakomernem curku elektronov s prostorsko gostoto elektrine ρ_e in polmerom ρ_0.

Rešitev
Za rešitev dane naloge je najbolj ustrezen valjni koordinatni sistem, pri katerem os z sovpada z osjo curka (slika 11). Prostorska porazdelitev elektrine je valjno simetrična, zato je tudi njeno polje valjno simetrično: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\rho)$ (oziroma $\partial\mathbf{E}/\partial\varphi = \partial\mathbf{E}/\partial z = \mathbf{0}$).

Z naslednjim razmislekom lahko pokažemo, da ima vektor električne poljske jakosti radialno smer. Curek elektronov (v mislih) razdelimo na diferencialno ozke niti, ki jih lahko obravnavamo kot naelektrene premice [1, zgled 11.2]. Zamislimo si ravnino Π, ki gre skozi splošno točko T ter skozi os curka (os z). Vsak par diferencialnih niti, ki ležita v zrcalno simetričnih legah z ozirom na to ravnino, ustvari v točki T električno polje, ki ima radialno smer[4] (slika 11): $\mathrm{d}\mathbf{E} = \mathbf{e}_\rho\,\mathrm{d}E_\rho$. Celotno polje curka, ki ga lahko določimo s superponiranjem (integriranjem) prispevkov diferencialnih niti, ima torej tudi radialno smer: $\mathbf{E} = \mathbf{e}_\rho E_\rho$.



Slika 11: Delitev na diferencialne niti.

Glede na zgoraj ugotovljeni lastnosti polja curka, torej da je $\mathbf{E} = \mathbf{e}_\rho E_\rho(\rho)$, lahko to polje zelo preprosto določimo z uporabo Gaussovega stavka [1, razdelek 12] na valjasti ploskvi $\mathcal{A}$, ki je soosna s curkom in ima polmer ρ ter dolžino l:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{znotraj}\,\mathcal{A}}}{\varepsilon_0}. \tag{38}$$

Skozi osnovni ploskvi valjaste ploskve $\mathcal{A}$ ni pretoka, saj je vektor poljske jakosti $\mathbf{E}$ tangencialen nanju. Pretok skozi ploskev $\mathcal{A}$ bo torej enak pretoku skozi njen plašč $\mathcal{A}_\mathrm{p}$. Na tem plašču imajo tudi vektorji diferencialnih ploskvic radialno smer: $\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{e}_\rho\,\mathrm{d}a$. Torej je

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}_\mathrm{p}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}_\mathrm{p}} \mathbf{e}_\rho E_\rho(\rho)\cdot\mathbf{e}_\rho\,\mathrm{d}a = \int_{\mathcal{A}_\mathrm{p}} E_\rho(\rho)\,\mathrm{d}a. \tag{39}$$

Na plašču $\mathcal{A}_\mathrm{p}$ je koordinata ρ konstantna in zato je tam konstanten tudi integrand $E_\rho(\rho)$. Torej je zgornji ploskovni integral (pretok) enak produktu ploščine plašča in vrednosti integranda na njem:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = E_\rho(\rho)\int_{\mathcal{A}_\mathrm{p}} \mathrm{d}a = 2\pi\rho l E_\rho(\rho). \tag{40}$$

[4]Ker gre za curek elektronov, ki imajo negativen naboj ($\rho_\mathrm{e} < 0$), je polje usmerjeno proti curku.

Določanje elektrine $Q_{\text{znotraj}\,\mathcal{A}}$ ločimo za primer, ko je plašč $\mathcal{A}_\text{p}$ znotraj curka ($\rho \le \rho_0$), ter za primer, ko je ta zunaj curka ($\rho > \rho_0$).

1. $\rho \le \rho_0$
   Ker je prostorska gostota elektrine povsod v curku enaka (ρ_e = konst., tudi znotraj ploskve $\mathcal{A}$, saj je ta tokrat v celoti znotraj curka), je objeta elektrina enaka produktu te gostote in volumna valja, ki ga ograjuje ploskev $\mathcal{A}$:

$$Q_{\text{znotraj}\,\mathcal{A}} = \rho_\text{e}\pi\rho^2 l. \tag{41}$$

2. $\rho > \rho_0$
   Tokrat je ploskev $\mathcal{A}$ širša kot curek elektronov, pa je pri računanju elektrine $Q_{\text{znotraj}\,\mathcal{A}}$ treba upoštevati volumen le tistega dela notranjosti ploskve $\mathcal{A}$, ki sovpada s curkom:

$$Q_{\text{znotraj}\,\mathcal{A}} = \rho_\text{e}\pi\rho_0^2 l. \tag{42}$$

Če rezultata obeh primerov združimo, dobimo

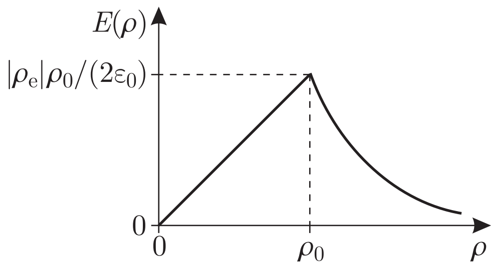
$$Q_{\text{znotraj}\,\mathcal{A}} = \begin{cases} \rho_\text{e}\pi\rho^2 l & \rho \le \rho_0 \\ \rho_\text{e}\pi\rho_0^2 l & \rho > \rho_0 \end{cases}. \tag{43}$$

Vektor električne poljske jakosti določimo tako, da enačbi (40) in (43) upoštevamo v Gaussovem stavku (38):

$$2\pi\rho l E_\rho(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho_\text{e}\pi\rho^2 l}{\varepsilon_0} & \rho \le \rho_0 \\ \dfrac{\rho_\text{e}\pi\rho_0^2 l}{\varepsilon_0} & \rho > \rho_0 \end{cases} \implies E_\rho(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho_\text{e}\rho}{2\varepsilon_0} & \rho \le \rho_0 \\ \dfrac{\rho_\text{e}\rho_0^2}{2\varepsilon_0\rho} & \rho > \rho_0 \end{cases} \tag{44}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(\rho) = \mathbf{e}_\rho E_\rho(\rho) = \begin{cases} \mathbf{e}_\rho \dfrac{\rho_\text{e}}{2\varepsilon_0}\rho & \rho \le \rho_0 \\ \mathbf{e}_\rho \dfrac{\rho_\text{e}\rho_0^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{1}{\rho} & \rho > \rho_0 \end{cases}}. \tag{45}$$

Na sliki 12 je prikazan diagram radialne funkcijske odvisnosti električne poljske jakosti.



Slika 12: Funkcija radialne odvisnosti absolutne vrednosti električne poljske jakosti.

2.2 Polje krogelno simetričnega oblaka elektrin

2.2.1 Naloga

Gostota prostorsko porazdeljene elektrine je podana s funkcijo $\rho(r) = \rho_0 \mathrm{e}^{-(r/r_0)^3}$. Določite vektor električne poljske jakosti na splošni oddaljenosti r od centra oblaka elektrin.

Rešitev
Funkcija porazdelitve elektrine $\rho(r)$ je podana v krogelnem koordinatnem sistemu in je krogelno simetrična ($\partial\rho/\partial\vartheta = \partial\rho/\partial\varphi = 0$). Zato lahko oblak elektrin (v mislih) razdelimo na diferencialno ozke, enakomerno naelektrene in koncentrične krogelne lupine, ki imajo središče v koordinatnem izhodišču torej v središču oblaka. Prispevki teh diferencialnih lupin k poljski jakosti so krogelno simetrični in imajo radialno smer [1, zgled 12.1]: $\mathrm{d}\mathbf{E} = \mathbf{e}_r\,\mathrm{d}E_r(r)$. Tudi celotna poljska jakost oblaka, ki jo lahko določimo s superponiranjem prispevkov $\mathrm{d}\mathbf{E}$ diferencialnih lupin, je torej krogelno simetrična in ima radialno smer: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r) = \mathbf{e}_r E_r(r)$. Še lažje kot s superponiranjem (integriranjem) jo določimo s pomočjo Gaussovega stavka [1, razdelek 12]. Tega uporabimo na sferi $\mathcal{A}$, ki ima polmer r in središče v centru oblaka:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{znotraj}\,\mathcal{A}}}{\varepsilon_0}. \tag{46}$$

V ploskovnem integralu upoštevajmo, da imajo tudi vektorji diferenicialnih ploskvic sfere $\mathcal{A}$ le radialno smer ($\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{e}_r\,\mathrm{d}a$), torej je $\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{e}_r E_r(r)\cdot\mathbf{e}_r\,\mathrm{d}a = E_r(r)\,\mathrm{d}a$. Ker ima integrand $E_r(r)$ konstantno vrednost na integracijskem območju $\mathcal{A}$, je ploskovni integral enak zmnožku te vrednosti in ploščine sfere $\mathcal{A}$:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} E_r(r)\,\mathrm{d}a = E_r(r)\oint_{\mathcal{A}}\mathrm{d}a = 4\pi r^2 E_r(r). \tag{47}$$

Elektrino znotraj sfere $\mathcal{A}$ določimo z integriranjem njene prostorske gostote po krogli $\mathcal{V}$, ki jo ograjuje ta sfera:

$$Q_{\text{znotraj}\,\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{V}} \rho(r')\,\mathrm{d}v'. \tag{48}$$

Če tudi pri tem integralu upoštevamo krogelno simetrijo integranda $\rho(r')$ in za diferencialne volumne $\mathrm{d}v'$ izberemo zgoraj omenjene diferencialne krogelne lupine polmerov r' in debelin $\mathrm{d}r'$, tako da je $\mathrm{d}v' = 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'$, dobimo

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \rho(r')\,\mathrm{d}v' &= \int_0^r \rho_0 \mathrm{e}^{-(r'/r_0)^3} 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{4\pi\rho_0 r_0^3}{3}\left(-\mathrm{e}^{-(r'/r_0)^3}\right)\Big|_0^r \\ &= \frac{4\pi\rho_0 r_0^3}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-(r/r_0)^3}\right)\end{aligned} \tag{49}$$

[5]. Vektor električne poljske jakosti določimo tako, da enačbe (47), (48) in (49) upoštevamo v Gaussovem stavku (46):

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi\rho_0 r_0^3}{3\varepsilon_0}\left(1-\mathrm{e}^{-(r/r_0)^3}\right) \quad\Longrightarrow\quad E_r(r) = \frac{\rho_0 r_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}\left(1-\mathrm{e}^{-(r/r_0)^3}\right) \tag{50}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(r) = \mathbf{e}_r E_r(r) = \mathbf{e}_r\frac{\rho_0 r_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}\left(1-\mathrm{e}^{-(r/r_0)^3}\right)}. \tag{51}$$

[5] Integral

$$\int \mathrm{e}^{-\left(r'/r_0\right)^3} r'^2\,\mathrm{d}r'$$

lahko rešimo s substitucijo $t = \left(r'/r_0\right)^3$:

$$\mathrm{d}t = \frac{3r'^2\,\mathrm{d}r'}{r_0^3} \quad\Longrightarrow\quad r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{r_0^3}{3}\,\mathrm{d}t \quad , \quad \int \mathrm{e}^{-(r'/r_0)^3} r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{r_0^3}{3}\int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{r_0^3}{3}\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) = -\frac{r_0^3}{3}\mathrm{e}^{-(r'/r_0)^3}.$$

3 Za tiste, ki želijo znati več

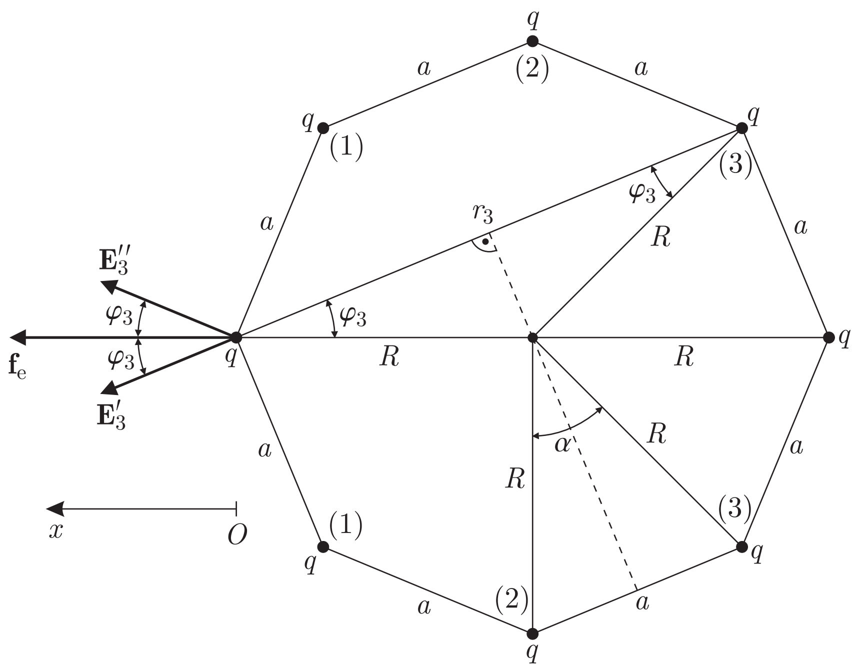
3.1 Polje preme elektrine

3.1.1 Naloga

Enake vzporedne preme elektrine so v prerezni ravnini razmeščene v oglišča pravilnega mnogokotnika. Določite vektor $\mathbf{f}_\mathrm{e}$ električne sile na enoto dolžine na eno od teh elektrin.

Rešitev
S q označimo vzdolžno gostoto posameznih premih elektrin, z a dolžino stranic mnogokotnika in z n število teh stranic. Postopek, ki ga bomo uporabili za določanje iskanega vektorja sile, ko je n sodo število, se rahlo razlikuje od postopka, ko je n liho.

1. n je sodo število.
   Na sliki 13 je prikazan primer pravilnega osmerokotnika. Določimo silo na npr. skrajno levo elektrino.



Slika 13: Snop vzporednih premih elektrin.

Vpeljimo naslednje oznake:

- (1) - prvi par premih elektrin,
- (2) - drugi par premih elektrin in
- (3) - tretji par premih elektrin.

Najprej določimo silo (na enoto dolžine) $\mathbf{f}_{\mathrm{e},\,i}$ polja i-tega para premih elektrin na skrajno levo[6]:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \mathbf{E}_i' + \mathbf{E}_i'' = \mathbf{e}_x 2E_i' \cos\varphi_i \\ E_i' &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i} \\ \frac{r_i}{2} &= R\cos\varphi_i \end{aligned}\right\} \implies \mathbf{E}_i = \mathbf{e}_x \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}, \tag{52}$$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{e},\,i} = q\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_x \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}. \tag{53}$$

Rezultat je zanimiv - sila $\mathbf{f}_{\mathrm{e},\,i}$ je enaka za vsak par premih elektrin, torej neglede ali je $i = 1, 2$ ali 3. Sedaj se vrnimo na splošen primer n-kotnika. Celotno silo na skrajno levo elektrino določimo tako, da seštejemo sile (polj) vseh parov elektrin in še silo (polja) skrajne desne elektrine (slika 13). Število vseh parov elektrin razen skrajne leve in skrajne desne elektrine je $n/2 - 1$. Torej je iskana sila enaka

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f}_\mathrm{e} &= \mathbf{e}_x \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{n/2-1}{R} + \frac{1}{2R}\right) \\ R &= \frac{a/2}{\sin(\alpha/2)} \\ \alpha &= 2\pi/n \end{aligned}\right\} \implies \mathbf{f}_\mathrm{e} = \mathbf{e}_x \frac{q^2(n-1)}{2\pi\varepsilon_0 a}\sin\frac{\pi}{n}. \tag{54}$$

2. n je liho število.
   Če bi na sliki 13 odstranili skrajno desno elektrino in razmike med ostalimi povečali, tako da so spet vsi enaki, bi dobili pravilen sedmerokotnik. V tem primeru je postopek določanja sile na skrajno levo elektrino podoben kot, če je n sodo število, le da sedaj ni skrajne desne elektrine, temveč so (razen elektrine, na katero računamo silo) le pari elektrin. Število teh parov je za primer splošnega n-kotnika enako $(n-1)/2$. Torej je iskana sila enaka

$$\mathbf{f}_\mathrm{e} = \mathbf{e}_x \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(n-1)/2}{R} = \mathbf{e}_x \frac{q^2(n-1)}{2\pi\varepsilon_0 a}\sin\frac{\pi}{n}. \tag{55}$$

   Rezultat je enak kot v primeru, ko je n sodo število.

Zaradi simetrije pravilnega mnogokotnika je velikost (oz. absolutna vrednost vektorja) sile na dolžinsko enoto na katerokoli od premih elektrin enaka

$$\boxed{f_\mathrm{e} = \frac{q^2(n-1)}{2\pi\varepsilon_0 a}\sin\frac{\pi}{n}}, \tag{56}$$

njena smer pa je stran od središča mnogokotnika (odbojna sila).

Literatura

[1] Anton R. Sinigoj: *Osnove elektromagnetike.* Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 1999.

[6] Na sliki 13 so prikazane količine za tretji par elektrin, torej za $i = 3$.